Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,
U. de Guanajuato.
Tarea 5 de Álgebra Lineal II: Subespacios invariantes.
1 de octubre de 2012.
Fecha de entrega: lunes 8 de octubre de 2012.

1. Sea E un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo K y sea $f \in \mathrm{End}(E)$. Suponga que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,\ \dim E_i = r_i,\ i = 1, \ldots, r$, donde cada $E_i \subset E$ es un subespacio invariante por f : $f_i := f|_{E_i} : E_i \longrightarrow E_i,\ i = 1, \ldots, r$.

   Demuestre que existe una base $\mathbf{B}$ de E tal que la matriz A de f en la base $\mathbf{B}$ es de la forma
   $$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$
   donde $A_i \in M_{r_i \times r_i}(K), i = 1, \ldots, r$.

2. Considere el espacio vectorial real $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$ con las operaciones de suma de funciones y producto de una función por un escalar definidas de manera usual. Sea $T \in End(V)$ dado por
   $$T(f)(x) = \left(\int_a^b f(t)\, dt \right) \cdot x.$$
   Demuestre que T es lineal y que el subconjunto $W = \{f \in V | f(x) = cx + d, \forall c, d \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V. Determine si W es o no T-invariante.

3. Sea E un espacio vectorial con $dim(E) < \infty$. Sean $f \in End(E)$ y $F_1, F_2, \ldots F_n$ subespacios f-invariantes de E tales que $E = \bigoplus_{j=1}^{n} F_j$. Suponga que todas las restricciones $f|_{F_j}$ son diagonalizables. ¿Es cierto que f es diagonalizable? Demuéstrelo o dé un contraejemplo.

4. **(a)** Demuestre que las siguientes dos versiones del Teorema de Cayley-Hamilton son equivalentes:

   (i) Sea $n \geq 1$ y sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Si $p_A(x)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(A) = 0$.

   (ii) Sea $n \geq 1$ y sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. El polinomio mínimo de A divide siempre al polinomio característico.

   (b) Explique detalladamente porqué la siguiente"demostración"trivial de (i), y por lo tanto de (ii), es falsa.
   Demostración. Si evaluamos el polinomio característico de $p_A(x)$ en A se tiene que
   $$p_A(A) = \det(A - AI) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$